Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Факультет информационных технологий

Лабораторная работа №7

Транспортная задача

Вариант 15

Выполнил

студент 2 курса 5 группы

Сураго Д.А.

Проверила Харланович А.В.

Минск 2020

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** Приобретение навыков решения открытой транспортной задачи.

**Теоретическое введение:**

Транспортные задачи – специальный класс задач линейного программирования. Эти задачи описывают перемещение (перевозку) какого-либо товара из пункта направления (например, места производства) в пункт назначения (склад или магазин). Назначение транспортной задачи – определение объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок.

 – количество поставщиков продукции;

 – количество потребителей продукции;

 – индекс для поставщиков;

 – индекс для потребителей;

,  – наличие продукции у каждого поставщика;

,  – потребность в продукции каждого потребителя;

 – стоимость доставки продукции единицы продукции от  - поставщика к -потребителю.

***Необходимо найти план доставки продукцию от поставщиков потребителям с минимальными транспортными издержками***.

 – задача называется ***закрытой***

– задача называется ***открытой(с нарушенным балансом)***.

С этой целью при *a* < *b* добавляем *фиктивного поставщика* с запасом b-a. Если же *a* > *b* , то добавляем *фиктивного потребителя* с заказом груза *a-b*. В обоих случаях соответствующие фиктивным объектам тарифы перевозок *cij* полагаем равными нулю. В результате суммарная стоимость перевозок не изменяется.

**Математическая модель**

 – решение задачи

Целевая функция

 – целевая функция

Ограничения

, , ,



**РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ**

**Этапы:**

1. Построение начального базисного решения : метод северо-западного угла, метод наименьшей стоимости (минимального элемента), метод Фогеля.
2. Итеративный процесс поиска оптимального решения (метод потенциалов).

Общая транспортная задача с m пунктами отправления и n пунктами назначения имеет m+n ограничений в виде равенств, по одному на каждый пункт отправления и назначения. Т. к. транспортная задача д.б. сбалансированной, то одно из этих равенств избыточно. Т.о. транспортная задача имеет m+n+1 независимых ограничений, отсюда вытекает, что начальное базисное решение состоит из m+n+1 базисных переменных.

**ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**

**Задание.** Решить транспортную задачу. Имеется 5 поставщиков продукции и 6 потребителей. Величина запасов, потребностей и стоимость затрат на перевозку продукции взять в соответствии с вариантом (*N*).

Условие:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16 | 183 |
| 2 | 25 | 15 | 23 | 20 | 22 | 28 | 128 |
| 3 | 16 | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 165 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15 | 25 | 19 | 115 |
| Потребности | 158 | 122 | 146 | 208 | 110 | 178 |  |

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков равнялись суммарной потребности потребителей. Проверим это условие.

∑a = 183+ 128+ 165+ 174+ 115= 765

∑b = 158+ 122+ 146+ 208+ 110+ 178= 922

Так как запасы поставщиков меньше потребности потребителей, введем фиктивного поставщика 6, с запасом продукции равным 922-765=157. Стоимость доставки единицы продукции от фиктивного поставщика ко всем потребителям примем равной нулю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16 | 183 |
| 2 | 25 | 15 | 23 | 20 | 22 | 28 | 128 |
| 3 | 16 | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 165 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15 | 25 | 19 | 115 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 158 | 122 | 146 | 208 | 110 | 178 |  |

Теперь выполняется условие.

Этап I

Метод наименьшей стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают клетку с наименьшей стоимостью, для этой ячейки присваиваем меньшее из чисел ai, или bj. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Повторяем, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c2,2=15.

x2,2 = min(128, 122) = 122.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16 | 183 |
| 2 | 25 | **15** | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16 | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 165 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15 | 25 | 19 | 115 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 158 | 0 | 146 | 208 | 110 | 178 |  |

Искомый элемент равен c5,4=15.

X5,4 = min(115, 208) = 115.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16 | 183 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16 | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 165 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | **15** | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 158 | 0 | 146 | 93 | 110 | 178 |  |

Искомый элемент равен c1,6=16.

X1,6 = min(183, 178) = 178.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | **16** | 5 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16 | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 165 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 158 | 0 | 146 | 93 | 110 | 0 |  |

Искомый элемент равен c3,1=16.

X3,1 = min(165, 158) = 158.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16|178 | 5 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | **16** | 20 | 26 | 23 | 17 | 26 | 7 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 146 | 93 | 110 | 0 |  |

Искомый элемент равен c3,5=17.

X3,5 = min(7, 110) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18 | 26 | 16|178 | 5 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | **17** | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 146 | 93 | 103 | 0 |  |

Искомый элемент равен c1,4=18.

X1,4 = min(5, 93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | **18** | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18 | 28 | 17 | 174 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 146 | 88 | 103 | 0 |  |

Искомый элемент равен c4,4=18.

X4,4 = min(174, 88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22 | 28 | 6 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | **18** | 28 | 17 | 86 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 146 | 0 | 103 | 0 |  |

Искомый элемент равен c2,5=22.

X2,5 = min(6, 103) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | **22** | 28 | 0 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25 | 18|88 | 28 | 17 | 86 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 146 | 0 | 97 | 0 |  |

Искомый элемент равен c4,3=25.

X4,3 = min(86, 146) = 86.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | 0 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | **25** | 18|88 | 28 | 17 | 0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 157 |
| Потребности | 0 | 0 | 60 | 0 | 97 | 0 |  |

Искомый элемент равен c6,3=0.

X6,3 = min(157, 60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | 0 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25|86 | 18|88 | 28 | 17 | 0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 97 |
| Потребности | 0 | 0 | 0 | 0 | 97 | 0 |  |

Искомый элемент равен c6,5=0.

X6,5 = min(97, 97) = 97.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | 0 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25|86 | 18|88 | 28 | 17 | 0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | **0** | 0 | 0 |
| Потребности | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | запасы |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | 0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | 0 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | 0 |
| 4 | 19 | 25 | 25|86 | 18|88 | 28 | 17 | 0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|97 | 0 | 0 |
| Потребности | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число базисных переменных. Их должно быть m+n-1= 11

Значение целевой функции для этого опорного плана равно: 18\*5+16\*178+15\*122+22\*6+16\*158+17\*7+25\*86+18\*88+15\*115+0\*60+0\*97= 13006

Этап II

*Метод потенциалов*

Каждому поставщику ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика. Каждому потребителю bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя. Для базисной ячейки (задействованного маршрута), сумма потенциалов поставщика и потребителя должна быть равна тарифу данного маршрута.

ui + vj = cij

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 18; 0 + v4=18; v4 = 18

u4 + v4 = 18; 18 + u4 = 18; u4 = 0

u4 + v3 = 25; 0 + v3 = 25; v3 = 25   
u6 + v3 = 0; 25 + u6 = 0; u6 = -25  
u6 + v5 = 0; -25 + v5 = 0; v5 = 25  
u2 + v5 = 22; 25 + u2 = 22; u2 =-3  
u2 + v2 = 15; -3 + v2 = 15; v2 = 18  
u3 + v5 = 17; 25 + u3 = 17; u3 = -8  
u3 + v1 = 16; -8 + v1 = 16; v1 = 24  
u5 + v4 = 15; 18 + u5 = 15; u5 = -3  
u1 + v6 = 16; 0 + v6 = 16; v6 = 16

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | U |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | u1=0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | u2=-3 |
| 3 | 16|158 | 20 | 26 | 23 | 17|7 | 26 | u3=-8 |
| 4 | 19 | 25 | 25|86 | 18|88 | 28 | 17 | u4=0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|97 | 0 | u6=-25 |
| V | v1=24 | v2=18 | v3=25 | v4=18 | v5=25 | v6=16 |  |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;2): 0 + 18 > 17; ∆12 = 0 + 18 - 17 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 25 > 21; ∆13 = 0 + 25 - 21 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 24 > 19; ∆41 = 0 + 24 - 19 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 24 > 18; ∆51 = -3 + 24 - 18 = 3 > 0  
max(1,4,5,3) = 5

Далее в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | U |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | u1=0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | u2=-3 |
| 3 | 16|158- | 20 | 26 | 23 | 17|7+ | 26 | u3=-8 |
| 4 | 19+ | 25 | 25|86- | 18|88 | 28 | 17 | u4=0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60+ | 0 | 0|97- | 0 | u6=-25 |
| V | v1=24 | v2=18 | v3=25 | v4=18 | v5=25 | v6=16 |  |

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 86. Прибавляем 86 к объемам грузов, стоящих в плюсовых и вычитаем 86 из xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | U |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | u1=0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | u2=-3 |
| 3 | 16|72 | 20 | 26 | 23 | 17|93 | 26 | u3=-8 |
| 4 | 19|86 | 25 | 25|0 | 18|88 | 28 | 17 | u4=0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|146 | 0 | 0|11 | 0 | u6=-25 |
| V | v1=24 | v2=18 | v3=25 | v4=18 | v5=25 | v6=16 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 18; 0 + v4 = 18; v4 = 18

u4 + v4 = 18; u4 + 18 = 18; u4 = 0

u5 + v4 = 15; u5 + 18 = 15; u5 = -3

u1 + v6 = 16; 0 + v6 = 16; v6 = 16

u4 + v1 = 19; 0 + v1 = 19; v1 = 19

u3 + v1 = 16; u3 + 19 = 16; u3 = -3

u3 + v5 = 17; -3 + v5 = 17; v5 = 20

u6 + v5 = 0; u6 + 20 = 0; u6 = -20

u2 + v5 = 22; u2 + 20 = 22; u2 = 2

v2 + u2 = 15; 2 + v2 = 15; v2 = 13

u6 + v3 = 0; -20 + v3 = 0; v3 = 20

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители/  Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | U |
| 1 | 27 | 17 | 21 | 18|5 | 26 | 16|178 | u1=0 |
| 2 | 25 | 15|122 | 23 | 20 | 22|6 | 28 | u2=2 |
| 3 | 16|72 | 20 | 26 | 23 | 17|93 | 26 | u3=-3 |
| 4 | 19|86 | 25 | 25 | 18|88 | 28 | 17 | u4=0 |
| 5 | 18 | 26 | 24 | 15|115 | 25 | 19 | u5=-3 |
| 6 | 0 | 0 | 0|146 | 0 | 0|11 | 0 | u6=-20 |
| V | v1=19 | v2=13 | v3=20 | v4=18 | v5=20 | v6=16 |  |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 18 \* 5 + 16 \* 178 + 15 \* 122 + 22 \* 6 + 16 \* 72 + 17 \* 93 + 19 \* 86 + 18 \* 88 + 15 \* 115 + 0 \* 146 + 0 \* 11 = 12576

Задача решена.

**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо направить груз к 4-у потребителю (5 ед.), к 6-у потребителю (178 ед.)  
Из 2-го склада необходимо направить груз к 2-у потребителю (122 ед.), к 5-у потребителю (6 ед.)  
Из 3-го склада необходимо направить груз к 1-у потребителю (72 ед.), к 5-у потребителю (93 ед.)  
Из 4-го склада необходимо направить груз к 1-у потребителю (86 ед.), к 4-у потребителю (88 ед.)  
Из 5-го склада необходимо весь груз направить к 4-у потребителю.  
**Потребность 3-го потребителя** остается неудовлетворенной на 146 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x63=0.  
**Потребность 5-го потребителя** остается неудовлетворенной на 11 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x65=0.